

RESISTENZA A TAGLIO DI TRAVI CON ARMATURE TRASVERSALI A DIVERSA INCLINAZIONE

Piero Colajanni¹, Lidia La Mendola², Giuseppe Mancini³, Antonino Recupero¹

1 Dipartimento di Ingegneria Civile – Università di Messina

2 Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Aerospaziale – Università di Palermo

3 Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica – Politecnico di Torino

SOMMARIO

Il modello per la valutazione del taglio resistente di elementi in c.a. dotati di staffe adottato dalle recenti Norme Tecniche per le Costruzioni, basato sul modello di Nielsen a campi di tensione ad inclinazione variabile, viene qui esteso per potere modellare il comportamento di travi dotate di due ordini di armature trasversali disposte secondo due diverse giaciture, ed eventualmente anche di armatura longitudinale di parete. Vengono poi presentati i risultati di una indagine numerica condotta con il modello proposto, finalizzata ad evidenziare la disposizione più efficace del secondo ordine di armatura trasversale nel conferire resistenza alle travi.

SUMMARY

The model for evaluation of shear strength of reinforced concrete member with transversal web reinforcement, recently adopted by the Italian code, and formulated by Nielsen on the basis of the variable inclination stress field approach, is generalized here to provide the shear strength of r.c. beams equipped with two orders of transversal web reinforcement lying on two different planes, and if present, longitudinal skin reinforcement also. The results of a numerical analysis are reported, in order to highlight the most effective layout of the double order web transversal reinforcement in providing shear strength of the beams.

1. INTRODUZIONE

Viene formulato un modello per la valutazione del taglio resistente per travi dotate di elementi di rinforzo trasversali disposti con due giaciture diverse ed eventualmente di elementi longitudinali di rinforzo diffusi in parete oltre quelli presenti all'intradosso ed all'estradosso della trave.

Tale tipo di rinforzo a taglio si riscontra frequentemente in diverse tipologie strutturali: - travi alte che presentano in anima armature trasversali inclinate con due diversi angoli di giacitura (90° e 45°), congiuntamente ad armature longitudinali diffuse; - travi reticolari miste acciaio-calcestruzzo, realizzate mediante tralicci metallici che, nella loro configurazione definitiva, sono inglobati nel getto finale di calcestruzzo; - travi in c.a. con rinforzi discontinui a taglio in FRP disposti con giacitura diversa rispetto a quella delle staffe originarie.

Sebbene i moderni codici di calcolo che ricorrono a sofisticati modelli FEM non lineari permettono una accurata previsione di comportamento [1], [2], [3] e [4], tale strumento diventa di difficile impiego nelle fasi di progettazione e di verifica dei risultati.

Attualmente i codici normativi non contengono

formulazioni specifiche che possono essere applicate indifferentemente ai diversi casi sopracitati e che si basano su un modello fisico unico e senza soluzione di continuità con quelli già applicati ai casi ordinari. Per esempio, nel caso di travi reticolari miste si suggerisce [5] di trascurare il contributo delle armature trasversali che presentano giaciture prossime a quelle dei "punti compressi di calcestruzzo", e di tenere in conto solo le armature "tese". In alternativa, si raccomanda di considerare il traliccio come un elemento resistente a se stante che fornisce il suo contributo in aggiunta a quello della trave. Nel caso di rinforzi in FRP, invece, la letteratura utilizza un approccio diverso e suggerisce l'adozione di modelli additivi [6], [7] già utilizzati, negli anni passati, in una formulazione classica per elementi in calcestruzzo armato ordinario provvisti di un solo ordine di staffe. Tali modelli, peraltro ripresi dalla proposta CNR [8] per rinforzi in FRP, sono stati oggi abbandonati nel caso di elementi strutturali ordinari in c.a. Pertanto, nel caso di rinforzi in FRP, la proposta CNR non appare in linea con la formulazione oggi utilizzata e consigliata dai codici normativi internazionali e nazionali quando gli elementi non sono dotati di rinforzo. È noto, infatti, come il modello resistente ormai ampiamente accettato dalla comunità scientifica europea per le

verifiche a taglio nel caso di elementi in calcestruzzo armato dotati di un solo ordine di armatura sia quello ad inclinazione variabile dei campi di tensione del calcestruzzo, proposto per prima dalla scuola danese [9] ed esteso successivamente dagli autori al caso di armature diffuse in anima in direzione longitudinale [10].

In questa sede viene derivato un modello per la valutazione del taglio resistente per travi dotate di elementi di rinforzo trasversali disposti con due giaciture diverse attraverso l'estensione del modello per elementi in calcestruzzo armato attualmente in uso nei codici europei [11].

L'obiettivo è, quindi, quello di proporre una formulazione che, pur garantendo la necessaria affidabilità, sia basata su un semplice modello meccanico di immediata interpretazione fisica in grado di orientare le scelte in fase di dimensionamento e progettazione esecutiva anche di interventi di rinforzo.

Il modello viene derivato mantenendo le stesse ipotesi del modello originario allo stato limite ultimo, riassunte di seguito:

- le armature trasversali disposte secondo due diverse giaciture e quelle longitudinali d'anima (armature di parete), se presenti, sono soggette a soli sforzi assiali, e sono diffuse nel calcestruzzo in modo tale da poterle ritenere uniformemente distribuite, così che la loro azione può essere modellata attraverso dei campi di tensione;
- il calcestruzzo d'anima è soggetto a stato di compressione monoassiale, inclinato di un angolo θ sulla direzione longitudinale e costituisce un altro campo di tensione;
- per la rottura si perviene alla formazione di un "traliccio multiplo resistente" in cui le armature longitudinali d'anima e di uno dei due correnti costituiscono gli elementi tesi, mentre il calcestruzzo dell'altro corrente e quello d'anima costituiscono gli elementi compressi;
- le armature trasversali (staffe) che presentano due giaciture diverse sono soggette a sforzi di trazione o di compressione in funzione delle singola giacitura con cui sono disposte.

Inoltre il modello non tiene conto in modo esplicito: - dell'effetto spinotto nelle armature sia longitudinali che trasversali; - dell'effetto di ingranamento del calcestruzzo lungo la fessura, la cui presenza è presa in conto nel differente orientamento tra i campi di tensione d'anima e quello dei conci di calcestruzzo compresi tra le fessure; - dell'effetto arco, che assume proporzioni rilevanti in prossimità degli appoggi, limitando la validità del modello solo alle zone correnti e non in prossimità di carichi concentrati, ove i modelli da adottare sono sostanzialmente locali.

Va inoltre fatto rilevare che il modello ad inclinazione variabile dei campi di tensione assume che l'orientamento delle prime fessure (crack line) e quello dei campi di tensione del calcestruzzo d'anima (yield line) sono diversi, ma la sua applicazione richiede che venga opportunamente controllato che la differenza fra le due giaciture si mantenga entro i limiti permessi dalla scabrezza delle superfici. Particolare attenzione dovrà essere posta in presenza di azioni cicliche, dove tali limiti potrebbero individuare un campo di variazione particolarmente ristretto rispetto a quello per carichi di natura statica [12].

2. FORMULAZIONE DEL MODELLO

Il modello può essere derivato attraverso la semplice scrittura delle equazioni di equilibrio di un generico concio di trave. Il concio analizzato è costituito dalle due zone correnti, una all'intradosso e l'altra all'estradosso, collegate da una zona d'anima. Le armature tenute in conto nel modello sono le seguenti (Fig. 1):

1. armatura longitudinale principale disposta nei due correnti, necessaria ad assorbire gli sforzi derivanti dalla pressoflessione o tensoflessione;
2. armatura longitudinale secondaria disposta in anima;
3. armatura trasversale disposta in anima, lungo la prima giacitura (α_1);
4. armatura trasversale disposta in anima, lungo la seconda giacitura (α_2).

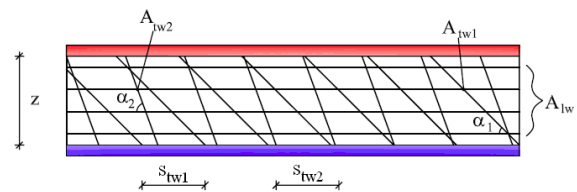


Figura 1 - Armatura in un tratto di trave

Il valore del taglio resistente viene ricercato applicando il teorema statico della teoria della plasticità; si ricerca cioè, il valore dei carichi a rottura come estremo superiore della classe delle soluzioni staticamente ammissibili, valutando così la cosiddetta "lower bound solution".

A tale scopo si esplicitano le condizioni di equilibrio di un tronco dell'elemento strutturale ottenuto sezionando all'ascissa x con un taglio parallelo alla direzione dei campi di calcestruzzo. Indicando con V^* ed M^* le azioni all'estremità sinistra del concio, in assenza di carichi distribuiti, con riferimento alla simbologia introdotta in Fig. 2, l'equilibrio alla traslazione verticale può essere scritto nella forma:

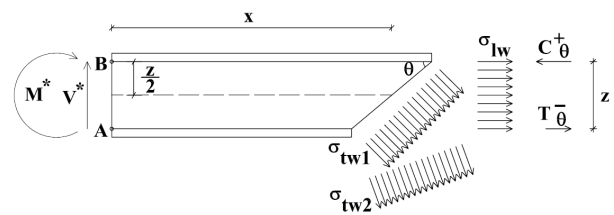


Figura 2 - Tronco di trave, sezionato all'estremità con piano parallelo alla direzione θ dei campi di compressione del calcestruzzo d'anima

$$V^* - \left(\frac{A_{fw1}}{s_{fw1} \cdot \sin \alpha_1} \right) \cdot \sigma_{fw1} \cdot z \cdot (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_1) \cdot \sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{A_{fw2}}{s_{fw2} \cdot \sin \alpha_2} \right) \cdot \sigma_{fw2} \cdot z \cdot (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \cdot \sin^2 \alpha_2 = 0 \quad (1)$$

in cui A_{fw1} e A_{fw2} sono le aree delle armature d'anima disposte rispettivamente nei passi s_{fw1} ed s_{fw2} .

Definendo le seguenti percentuali meccaniche di armatura:

$$\omega_{rw1} = \frac{A_{rw1}}{b_w \cdot s_{rw1} \cdot \sin \alpha_1} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

$$\omega_{rw2} = \frac{A_{rw2}}{b_w \cdot s_{rw2} \cdot \sin \alpha_2} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

in cui b_w è la larghezza della sezione, f_{yd} la tensione di snervamento dell'acciaio e f_{cd} la resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima e, indicando con $V_{sd}(x)$ il taglio sollecitante all'ascissa x ($V_{sd}(x) = V^*$ in assenza di carichi distribuiti), l'Equazione 1 assume la forma:

$$V_{sd}(x) = \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{rw1} \cdot f_{cd}' \cdot z \cdot b_w \cdot (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_1) \cdot \sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{rw2} \cdot f_{cd}' \cdot z \cdot b_w \cdot (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \cdot \sin^2 \alpha_2 \quad (2)$$

Indicando con C_θ^+ la risultante degli sforzi nel corrente compresso alla sezione $x+0.5 z \text{ctg } \theta$, l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto A di Fig. 2 fornisce:

$$M^* - C_\theta^+ \cdot z + \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \omega_{rw1} f_{cd}' z b_w \cdot (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_1) \sin^2 \alpha_1 x + \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \omega_{rw2} f_{cd}' z b_w (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \sin^2 \alpha_2 x + \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \omega_{rw1} f_{cd}' z b_w (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_1) \sin^2 \alpha_1 \text{ctg } \alpha_1 \frac{z}{2} + \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \omega_{rw2} f_{cd}' z b_w (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \sin^2 \alpha_2 \text{ctg } \alpha_2 \frac{z}{2} + \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \omega_{hw} f_{cd}' z b_w \frac{z}{2} = 0 \quad (3)$$

dove:

$$\omega_{hw} = \frac{A_{hw}}{b_w \cdot h} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$

essendo A_{hw} l'area dell'armatura longitudinale di parete e h l'altezza della sezione.

Sostituendo l'Equazione 2 nell'Equazione 3, esprimendo il momento alla generica ascissa come $M_{sd}(x) = M^* + V^*x$, e raccogliendo a fattore comune, si ottiene:

$$M_{sd}(x) + \left[\left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{rw1} \cdot (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_1) \cdot \sin^2 \alpha_1 \cdot \text{ctg } \alpha_1 + \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{rw2} \cdot (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \cdot \sin^2 \alpha_2 \cdot \text{ctg } \alpha_2 + \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{hw} \right] \cdot f_{cd}' \cdot z \cdot b_w \cdot \frac{z}{2} = C_\theta^+ \cdot z \quad (4)$$

Indicando con T_θ^- la risultante degli sforzi nel corrente teso alla sezione $x-0.5 z \text{ctg } \theta$, l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto B di Fig. 2, dopo aver sostituito l'Equazione 2, in maniera del tutto analoga a quanto fatto per

ottenere la precedente Equazione 4, assume la forma:

$$M_{sd}(x) - \left[\left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{rw1} (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_1) \cdot \sin^2 \alpha_1 \cdot \text{ctg } \alpha_1 + \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \omega_{rw2} (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \sin^2 \alpha_2 \text{ctg } \alpha_2 + \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{hw} \right] f_{cd}' \cdot z \cdot b_w \frac{z}{2} = T_\theta^- \cdot z \quad (5)$$

In maniera del tutto analoga, è possibile scrivere le equazioni di equilibrio di un tronco dell'elemento strutturale ottenuto sezionando all'ascissa x con un piano parallelo alla direzione α_2 delle staffe.

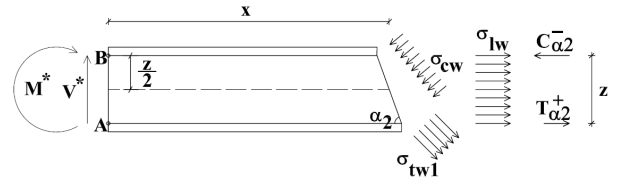


Figura 3 – Tronco di trave, sezionato all'estremità con piano parallelo alla direzione delle staffe α_2

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale, introducendo il taglio ridotto e il rapporto meccanico delle armature trasversali, si ottiene:

$$V_{sd}(x) = \sigma_{cw} \cdot z \cdot b_w \cdot (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \cdot \sin^2 \theta + \omega_{rw1} \cdot f_{cd}' \cdot b_w \cdot z (\text{ctg } \alpha_1 - \text{ctg } \alpha_2) \cdot \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \cdot \sin^2 \alpha_1 \quad (6)$$

Indicando con $C_{\alpha_2}^-$ la risultante degli sforzi nel corrente compresso alla sezione $x-0.5 z \text{ctg } \alpha_2$, l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto A di Fig. 3, dopo le stesse manipolazioni fatte per l'omologa Equazione 4, assume la forma:

$$M_{sd}(x) + f_{cd}' z b_w \left[- \left(\frac{\sigma_{cw}}{f_{cd}} \right) (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \sin^2 \theta \text{ctg } \theta + \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \omega_{hw} + (\text{ctg } \alpha_1 - \text{ctg } \alpha_2) \sin^2 \alpha_1 \text{ctg } \alpha_1 \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \omega_{rw1} \right] \frac{z}{2} = C_{\alpha_2}^- \cdot z \quad (7)$$

Indicando con $T_{\alpha_2}^+$ la risultante degli sforzi nel corrente compresso alla sezione $x+0.5 z \text{ctg } \alpha_2$, l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto B di Fig.3, può essere posta nella forma:

$$M_{sd}(x) + f_{cd}' z b_w \frac{z}{2} \left[\left(\frac{\sigma_{cw}}{f_{cd}} \right) (\text{ctg } \theta + \text{ctg } \alpha_2) \sin^2 \theta \text{ctg } \theta - \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{hw} + \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \omega_{rw1} (\text{ctg } \alpha_1 - \text{ctg } \alpha_2) \sin^2 \alpha_1 \text{ctg } \alpha_1 \right] = T_{\alpha_2}^+ \cdot z \quad (8)$$

Le Equazioni 2, 4, 5, 6, 7 e 8, opportunamente riformulate, consentono di valutare il taglio resistente, come sarà

evidenziato nel successivo paragrafo. Tuttavia, al fine di mostrare la fondatezza del modello, di seguito vengono scritte anche le equazioni di equilibrio del tratto di trave ottenuto effettuando una sezione alla generica ascissa x con un piano parallelo alle giacitura α_1 del primo ordine di staffe, rappresentato in Fig. 4.

In maniera analoga a quanto fatto in precedenza, è allora possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale, che dopo alcune manipolazioni assume la forma:

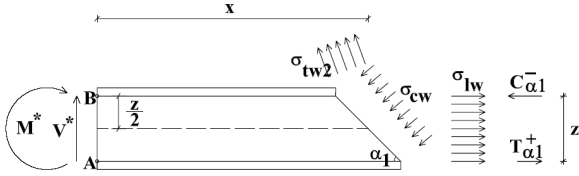


Figura 4 – Tronco di trave, sezionato all'estremità con piano parallelo alla direzione delle staffe α_1

$$V_{sd}(x) = \sigma_{cw} \cdot z \cdot b_w \cdot (\text{ctg} \theta + \text{ctg} \alpha_1) \cdot \sin^2 \theta + \omega_{tw2} \cdot f'_{cd} \cdot b_w \cdot z (\text{ctg} \alpha_2 - \text{ctg} \alpha_1) \cdot \left(\frac{\sigma_{tw2}}{f_{yd}} \right) \cdot \sin^2 \alpha_2 \quad (9)$$

Indicando con $C_{\alpha_1}^-$ la risultante degli sforzi nel corrente compresso alla sezione $x-0.5z \text{ ctg} \alpha_1$, l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto A di Fig. 4, dopo le stesse manipolazioni fatte per l'omologa Equazione 4, assume la forma:

$$M_{sd}(x) - f'_{cd} z b_w \left[\left(\frac{\sigma_{cw}}{f'_{cd}} \right) (\text{ctg} \theta + \text{ctg} \alpha_1) \sin^2 \theta \text{ctg} \theta + \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \omega_{hw} + (\text{ctg} \alpha_2 - \text{ctg} \alpha_1) \sin^2 \alpha_2 \text{ctg} \alpha_2 \left(\frac{\sigma_{tw2}}{f_{yd}} \right) \omega_{tw2} \right] \frac{z}{2} = C_{\alpha_1}^- z \quad (10)$$

Indicando con $T_{\alpha_1}^+$ la risultante degli sforzi nel corrente compresso alla sezione $x+0.5z \text{ ctg} \alpha_1$, l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al punto B di Fig. 4, può essere posta nella forma:

$$M_{sd}(x) + f'_{cd} z b_w \left[\left(\frac{\sigma_{cw}}{f'_{cd}} \right) (\text{ctg} \theta + \text{ctg} \alpha_1) \cdot \sin^2 \theta \cdot \text{ctg} \theta + \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{shw} + \left(\frac{\sigma_{tw2}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{tw2} (\text{ctg} \alpha_2 - \text{ctg} \alpha_1) \cdot \sin^2 \alpha_2 \cdot \text{ctg} \alpha_2 \right] \frac{z}{2} = T_{\alpha_1}^+ z \quad (11)$$

Per valutare la risultante degli sforzi sui correnti in trazione e in compressione all'ascissa x si può procedere attraverso un'interpolazione lineare fra le azioni ricavate attraverso le precedenti equazioni in due qualsiasi delle tre sezioni considerate.

Per il corrente compresso, interpolando linearmente fra i risultati ottenuti con sezioni parallele alla giacitura α_1 e θ , o α_2 e θ , si ottiene rispettivamente:

$$C(x) = \frac{C_{\alpha_1}^- \cdot \text{ctg} \theta + C_{\theta}^+ \cdot \text{ctg} \alpha_1}{\text{ctg} \alpha_1 + \text{ctg} \theta} = \frac{C_{\alpha_2}^- \cdot \text{ctg} \theta + C_{\theta}^+ \cdot \text{ctg} \alpha_2}{\text{ctg} \alpha_2 + \text{ctg} \theta} \quad (12a,b)$$

In maniera analoga, per il corrente teso risulta:

$$T(x) = \frac{T_{\theta}^- \text{ctg} \alpha_1 + T_{\alpha_1}^+ \text{ctg} \theta}{\text{ctg} \alpha_1 + \text{ctg} \theta} = \frac{T_{\theta}^- \text{ctg} \alpha_2 + T_{\alpha_2}^+ \text{ctg} \theta}{\text{ctg} \alpha_2 + \text{ctg} \theta} \quad (13a,b)$$

Sostituendo indifferentemente nell'Equazione 12a, le Equazioni 4 e 10 oppure nell'Equazione 12b le Equazioni 4 e 7, si ottiene:

$$C(x) = \frac{M_{sd}(x)}{z} - \left[\left(\frac{\sigma_{cw}}{f'_{cd}} \right) \cos^2 \theta - \left(\frac{\sigma_{tw1}}{f_{yd}} \right) \omega_{tw1} \cos^2 \alpha_1 + \left(\frac{\sigma_{tw2}}{f_{yd}} \right) \omega_{tw2} \cos^2 \alpha_2 - \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \omega_{hw} \right] \frac{f'_{cd} b_w z}{2} \quad (14)$$

In maniera analoga, sostituendo indifferentemente nell'Equazione 13a, le Equazioni 5 e 11, oppure nell'Equazione 13b le Equazioni 5 e 8, si ottiene:

$$T(x) = \frac{M_{sd}(x)}{z} + \left[\left(\frac{\sigma_{cw}}{f'_{cd}} \right) \cos^2 \theta - \left(\frac{\sigma_{tw1}}{f_{yd}} \right) \omega_{tw1} \cos^2 \alpha_1 + \left(\frac{\sigma_{tw2}}{f_{yd}} \right) \omega_{tw2} \cos^2 \alpha_2 - \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \omega_{hw} \right] \frac{f'_{cd} b_w z}{2} \quad (15)$$

Per potere esplicitare le equazioni per il dimensionamento a taglio per elementi strutturali, anche dotati di armatura di parete, si impone l'uguaglianza dell'Equazione 6 con l'Equazione 2, ottenendo:

$$V_{sd}(x) = \sigma_{cw} \cdot z \cdot b_w \cdot (\text{ctg} \theta + \text{ctg} \alpha_2) \cdot \sin^2 \theta + \omega_{tw1} \cdot f'_{cd} \cdot b_w \cdot z \cdot (\text{ctg} \alpha_1 - \text{ctg} \alpha_2) \cdot \left(\frac{\sigma_{tw1}}{f_{yd}} \right) \cdot \sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\sigma_{tw1}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{tw1} \cdot f'_{cd} \cdot z \cdot b_w \cdot (\text{ctg} \theta + \text{ctg} \alpha_1) \cdot \sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\sigma_{tw2}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{tw2} \cdot f'_{cd} \cdot z \cdot b_w \cdot (\text{ctg} \theta + \text{ctg} \alpha_2) \cdot \sin^2 \alpha_2 \quad (16)$$

Dall'Equazione 16 è possibile ricavare la seguente relazione fra i valori dei campi di tensione nel calcestruzzo e nei due ordini di armature:

$$\left(\frac{\sigma_{cw}}{f'_{cd}} \right) = \omega_{tw1} \cdot \left(\frac{\sigma_{tw1}}{f_{yd}} \right) \cdot \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \theta} + \omega_{tw2} \cdot \left(\frac{\sigma_{tw2}}{f_{yd}} \right) \cdot \frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \theta} \quad (17)$$

Le Equazioni 14 e 15, sostituendo l'Equazione 17, possono essere poste nelle seguenti forme semplificate:

$$C(x) = \frac{M_{sd}(x)}{z} - \left[\omega_{tw1} \left(\frac{\sigma_{tw1}}{f_{yd}} \right) \left(\frac{\text{ctg}^2 \theta - \text{ctg}^2 \alpha_1}{1 + \text{ctg}^2 \alpha_1} \right) + \omega_{tw2} \left(\frac{\sigma_{tw2}}{f_{yd}} \right) \left(\frac{\text{ctg}^2 \theta - \text{ctg}^2 \alpha_2}{1 + \text{ctg}^2 \alpha_2} \right) - \omega_{hw} \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \right] \frac{f'_{cd} z b_w}{2} \quad (18)$$

$$T(x) = \frac{M_{sd}(x)}{z} + \left[\omega_{w1} \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \left(\frac{ctg^2 \theta - ctg^2 \alpha_1}{1 + ctg^2 \alpha_1} \right) + \omega_{w2} \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \left(\frac{ctg^2 \theta - ctg^2 \alpha_2}{1 + ctg^2 \alpha_2} \right) - \omega_{hw} \left(\frac{\sigma_{hw}}{f_{yd}} \right) \right] \frac{f'_{cd} \cdot z \cdot b_w}{2} \quad (19)$$

Le Equazioni 2, 18 e 19 costituiscono il gruppo di equazioni, che in base al teorema statico della teoria della plasticità fornisce il taglio resistente come estremo superiore delle soluzioni che verificano le condizioni di equilibrio, nell'ipotesi che vengano soddisfatte le seguenti condizioni di "ammissibilità plastica":

$$0 \leq \left(\frac{\sigma_{cw}}{f_{cd}} \right) \leq 1 \quad (20)$$

$$-1 \leq \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \leq 1 \quad (21)$$

$$-1 \leq \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \leq 1 \quad (22)$$

$$T(x) \leq A_s \cdot f_{yd} \quad (23)$$

$$-A'_s \cdot f_{yd} \leq C(x) \leq b_w \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot f_{yd} \quad (24)$$

in cui A'_s ed A_s sono le aree di armatura longitudinale a flessione rispettivamente compressa e tesa e f_{cd} la resistenza a compressione del calcestruzzo.

L'Equazione 20 può essere espressa, in base all'Equazione 17, nella forma:

$$0 \leq \omega_{w1} \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \theta} + \omega_{w2} \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \theta} \leq 1 \quad (25)$$

Occorre peraltro ricordare che per esigenze di duttilità [11] è necessario limitare comunque la variazione di $ctg \theta$ secondo la relazione:

$$1 \leq ctg \theta \leq (ctg \theta)_{\max} \quad (26)$$

3. RICERCA DEL TAGLIO RESISTENTE

Per ottenere il massimo valore del taglio resistente è necessario risolvere un problema di programmazione non lineare, nel quale la funzione obiettivo è proprio l'espressione del taglio nell'Equazione 2 (o le equivalenti Equazioni 6 o 9), di seguito per comodità riportata in forma adimensionale:

$$v = \frac{V_{sd}}{f'_{cd} z b_w} = \left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{w1} \cdot (ctg \theta + ctg \alpha_1) \cdot \sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right) \cdot \omega_{w2} \cdot f'_{cd} \cdot z \cdot b_w \cdot (ctg \theta + ctg \alpha_2) \cdot \sin^2 \alpha_2 \quad (27)$$

Tale funzione deve essere resa massima modificando le quantità $\left(\frac{\sigma_{rw1}}{f_{yd}} \right)$, $\left(\frac{\sigma_{rw2}}{f_{yd}} \right)$, $ctg \theta$ che possono variare rispettando le condizioni espresse dalle Equazioni 21, 22, 23, 24, 25 e 26.

Per la soluzione del problema posto può essere implementato uno specifico algoritmo in C++ o in Fortran o, in alternativa, può essere utilizzato quello fornito da un foglio di calcolo commerciale.

In particolare, nel caso in esame, si è scelto di adoperare l'applicazione "risolutore" di Microsoft Excel® che utilizza il codice di ottimizzazione non lineare Generalized Reduced Gradient (GRG2) sviluppato da Leon Lasdon (Università del Texas ad Austin) e Allan Waren (Università di Cleveland). Si riporta in Fig. 5 una tipica schermata della macro elaborata allo scopo.

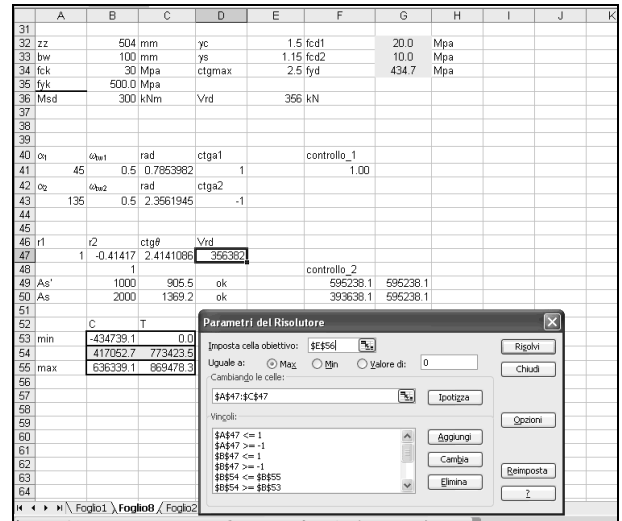


Figura 5 – Esempio di ricerca della capacità a taglio con Excel®

4. ANALISI DEI RISULTATI DEL MODELLO

Per una prima valutazione degli effetti prodotti dalla doppia disposizione delle armature trasversali sulla resistenza a taglio di elementi di trave in c.a. con il modello proposto si è condotta una indagine numerica valutando la resistenza a taglio, per travi soggette a prove di carico su quattro punti, di elementi con tre schemi di disposizione delle armature trasversali diverse, mostrati in Fig. 6, caratterizzati da $\omega_{w1} = \omega_{w2}$.

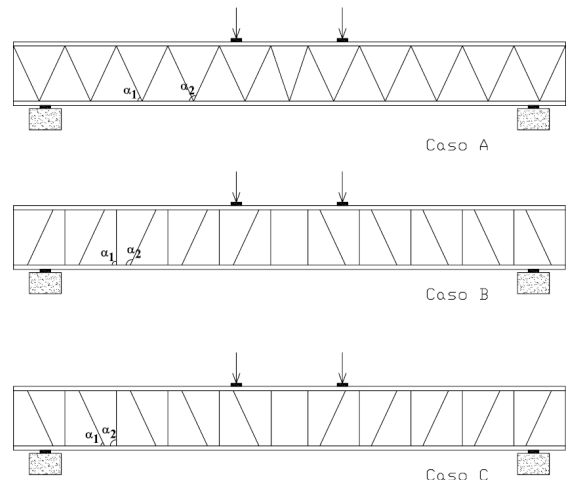


Figura 6 – Schemi strutturali utilizzati per le analisi numeriche

Sono state condotte analisi al variare dell'inclinazione delle armature trasversali e di alcuni parametri rappresentativi dei rapporti meccanici e geometrici di armatura trasversale.

Per tutti i casi analizzati si sono adottati materiali con le stesse caratteristiche e armature con percentuali identiche.

L'area di armatura longitudinale disposta è stata scelta in modo da scongiurare la rottura dell'elemento strutturale in flessione e raggiungere quindi il collasso per taglio.

Sono stati considerati elementi in assenza di armature longitudinali di parete, con armature trasversali con giaciture α variabili da 45° sino a 90° , essendo: - caso a) $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=180^\circ-\alpha$; - caso b) $\alpha_1=90^\circ$, $\alpha_2=180^\circ-\alpha$; - caso c) $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=90^\circ$;

Nella Fig. 7, per i tre diversi valori del rapporto meccanico di armatura trasversale $\omega_{w1}=\omega_{w2}=\omega_w$ pari a 0.05, 0.2 e 0.4,

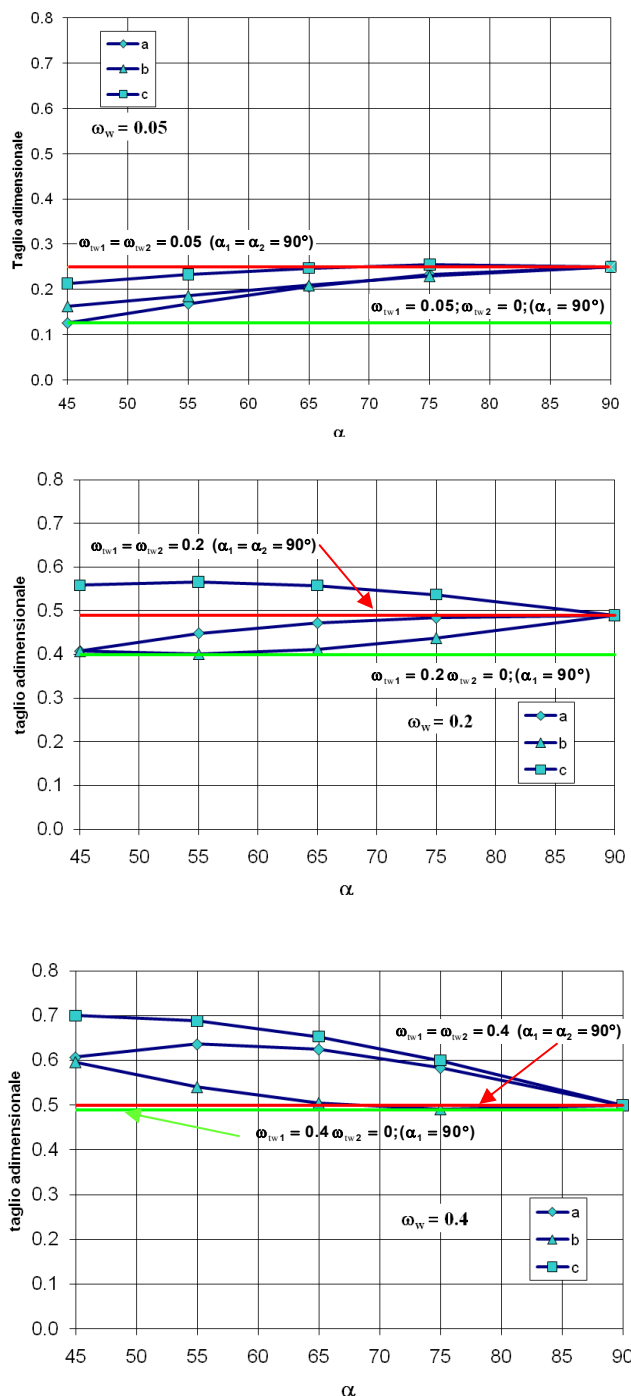


Figura 7 – Taglio adimensionale per $ctg \theta = 2.5$

per ciascuno degli schemi di Fig. 6, sono rappresentati i valori del taglio resistente adimensionale $v = V_u / (b_w z f_{cd})$.

Nei grafici sono state anche riportate, la resistenza a taglio della trave armata con una quantità di staffe totale pari a quella delle configurazioni a), b), e c) tutte poste in verticale ($\alpha_1=\alpha_2=90^\circ$; $\omega_{w1}=\omega_{w2}=\omega_w$) e quelle della stessa trave dotata della metà delle staffe ($\alpha_1=90^\circ$; $\omega_{w1}=\omega_w$; $\omega_{w2}=0$).

Il confronto dei risultati ottenuti per i tre schemi con staffe diagonali con la configurazione per la quale si è posto $\omega_{w1}=\omega_{w2}=\omega_w$ consente di stimare l'efficienza della disposizione diagonale scelta, il confronto con la configurazione $\omega_{w1}=\omega_w$, $\omega_{w2}=0$ consente di stimare il contributo fornito dalle sole staffe inclinate.

I grafici mostrano che, come era facile prevedere, lo schema "c" è quello che fornisce la maggiore resistenza per ogni angolo di giacitura e quantità di armatura trasversale, e già con rapporti meccanici delle staffe non inferiore a $\omega_w=0.2$ ha una maggiore efficienza per qualsiasi angolo di inclinazione delle staffe nel range considerato, rispetto al caso di staffe solo verticali.

Va inoltre rilevato che, mentre in presenza di staffe verticali incrementi di armatura trasversale corrispondenti a valori superiori a $\omega_w=0.4$ sono praticamente inefficaci, in presenza di staffe inclinate tale limite può essere sensibilmente maggiore.

Le curve mostrano inoltre come per tutti i tre casi a), b) e c) l'inclinazione delle armature che consente di ottenere la massima resistenza vari al variare della percentuale di armatura trasversale totale; in particolare per valori bassi della percentuale di armatura, le disposizioni di armatura inclinata che più si avvicinano alla configurazione verticale sono le più efficienti, mentre per grandi percentuali di armatura trasversale le disposizioni a 45° sono le più efficaci.

Allo scopo di evidenziare gli effetti conseguibili nei tre schemi attraverso l'incremento di armatura, nella Fig. 8 si riportano i valori del taglio adimensionale al variare del rapporto meccanico di armatura trasversale totale. Le curve confermano che la disposizione secondo lo schema c) mostra la maggiore efficienza, evidenziando inoltre che esiste un valore di ω_w per il quale tutte le inclinazioni considerate forniscono praticamente la stessa resistenza.

Per la configurazione c), per basse percentuali di armatura, la disposizione verticale delle staffe è ancora quella ottimale, ma con modestissime differenze rispetto alle configurazioni con armatura inclinata. Al crescere di ω_w le disposizioni a 45° e 55° sono quelle che consentono le maggiori prestazioni, in sostanza coincidenti fra loro, mentre ulteriori inclinazioni delle staffe producono significative perdite di resistenza. Va inoltre rilevato che anche per elevatissime percentuali di armatura trasversale ($\omega_{w1}=\omega_{w2}=\omega_w=1$) il taglio resistente è sempre crescente, fino a raggiungere valori doppi rispetto al caso di sole staffe verticali.

Infine è stata condotta un'analisi finalizzata a valutare l'influenza della limitazione di $(ctg \theta)_{max}=2.5$ imposta dalla normativa, confrontando i valori del taglio resistente ottenuti lasciando libera l'inclinazione dei campi di compressione del calcestruzzo. A tale scopo in Fig. 9 sono rappresentati i valori del taglio resistente ottenuto senza tale limitazione ($ctg \theta)_{max}=\infty$, ed il corrispondente valore assumendo $(ctg \theta)_{max}=2.5$ per le tre tipologie, e il valore di $\alpha=65^\circ$, che consente di valutare al meglio l'influenza della giacitura massima sulla capacità portante per taglio (vedi Fig. 9). In questo caso era possibile prevedere che le differenze risultano significative soltanto per valori estremamente modesti della percentuale meccanica di armatura trasversale $\omega_w \leq 0.1$, e sono minime per la configurazione c).

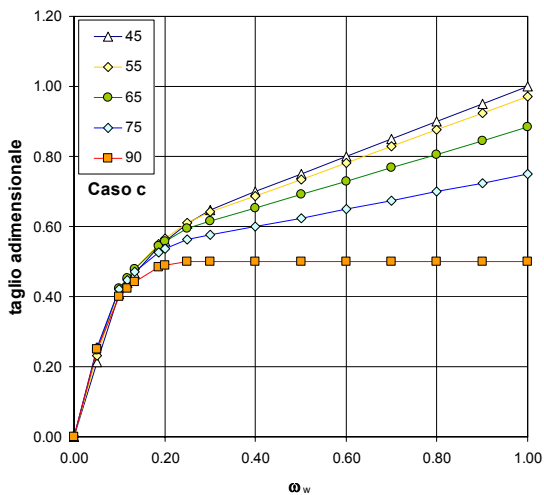
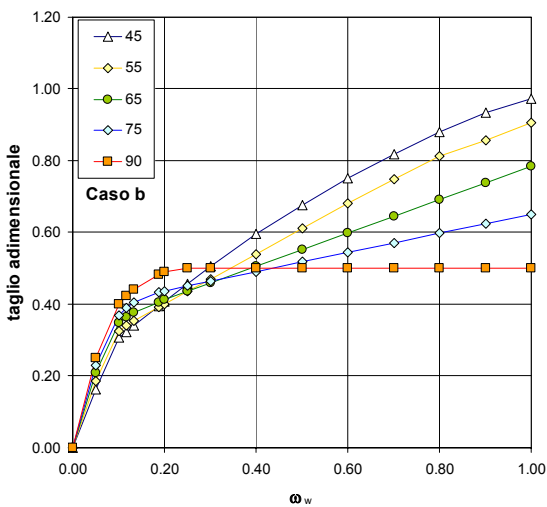
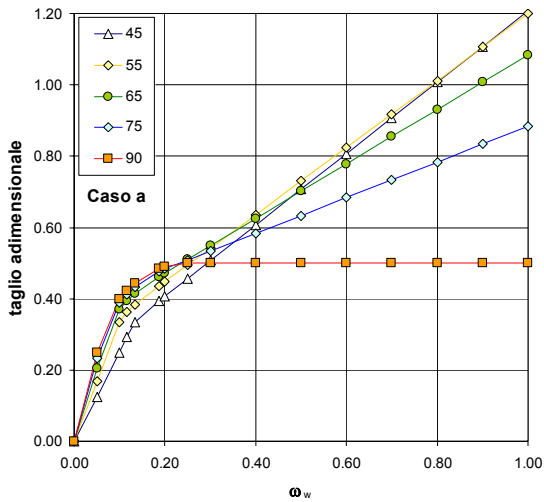


Figura 8 – Taglio adimensionale al variare di ω_w per $\text{ctg } \theta = 2.5$

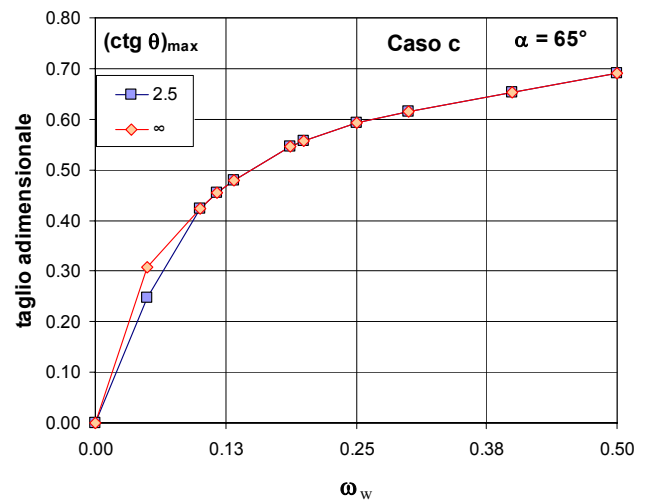
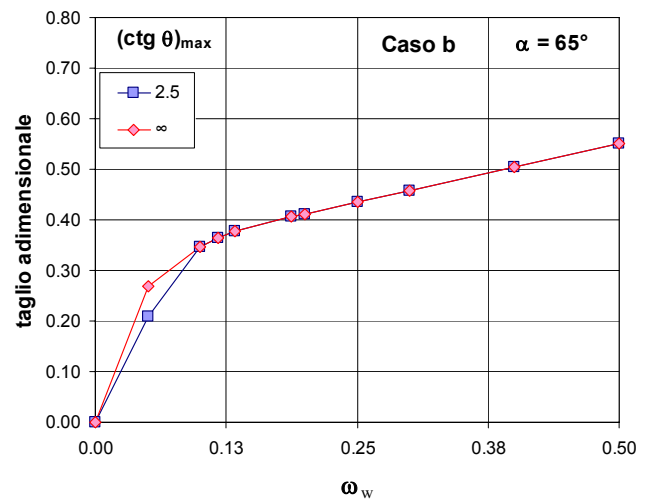
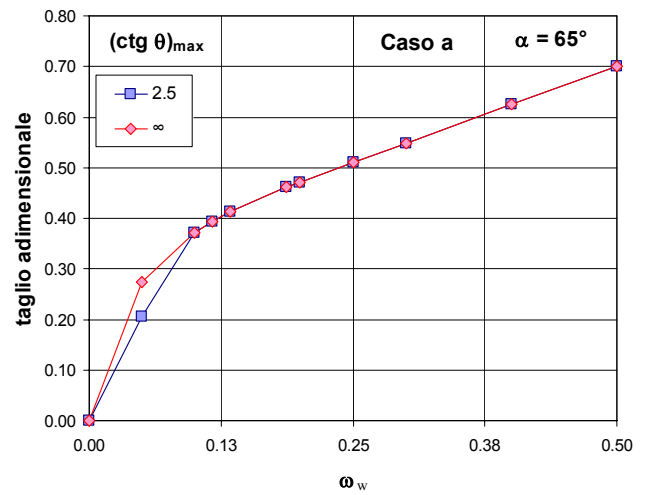


Figura 9 – Taglio adimensionale in assenza del limite per $(\text{ctg } \theta)_{\max}$

5. CONCLUSIONI

È stato presentato un modello per la stima della capacità portante a taglio di travi provviste di due ordini di staffe. Le analisi parametriche hanno mostrato come lo schema più efficiente a parità di armatura è quello che prevede, oltre l'ordine di staffe verticali, un secondo ordine inclinato nella direzione prossima a quella delle isostatiche di trazione. Con questa disposizione di armature, la capacità portante a taglio è in pratica sempre superiore a quella fornita dalla disposizione

che prevede la stessa quantità totale di staffe poste interamente con giacitura verticale.

È inoltre stato mostrato che, per tale configurazione, diversamente che per le staffe poste con giacitura verticale, il taglio resistente cresce al crescere della percentuale di armatura trasversale anche per valori estremamente elevati di quest'ultima. Infine l'analisi svolta senza alcuna limitazione sul valore di $(\text{ctg } \theta)_{\max}$ ha evidenziato come questa limitazione

giochi sostanzialmente un ruolo significativo nel caso di bassi valori del rapporto meccanico di armatura d'anima ($\alpha_w \leq 0.1$) e sia praticamente ininfluyente per valori maggiori.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERTAGNOLI G., CARBONE V.I. (2008), A finite element formulation for concrete structures in plane stress, *Structural Concrete*, Vol. 9, N. 2, 87-99
- [2] BELLETTI B., CERIONI R., IORI I. (2001). A physical approach for reinforced concrete (PARC) membrane elements-, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol.127, N. 12,1421-1426
- [3] VECCHIO F. J., M.P. COLLINS (1986), The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI Structural Journal*; Vol. 83, N. 2, 219-231
- [4] COLLINS M.P., D. MITCHELL, P.E. ADEBAR, F.J. VECCHIO (1996), A general shear design method, *ACI Structural Journal*, Vol. 93, N. 1, 36-45
- [5] AA.VV. (2011) Progettare con le travi prefabbricate reticolari miste, PREM. Ed. Tecniche Nuove, Milano
- [6] J.F. CHEN, J.G. TENG (2003), Shear capacity of FRP-strengthened RC beams: FRP debonding, *Construction and Building Materials*, Vol. 17, 27-41
- [7] A. KHALIFA, A. NANNI (2000), Improving shear capacity of existing RC T-section beams using CFRP composites, *Cement & Concrete Composites*, Vol. 22, 165-174
- [8] CNR-DT 200/2004 (2004), Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Interventi di Consolidamento Statico mediante l'utilizzo di Compositi Fibrorinforzati - C. N. R. - Commissione Incaricata di Formulare Pareri in Materia di Normativa Tecnica Relativa alle Costruzioni
- [9] M.P. NIELSEN (1999), Limit analysis and concrete plasticity (2nd ed.), *Boca Raton - Florida: CRC*
- [10] G. MANCINI, A. RECUPERO, C.D. SCILIPOTI (1996), Taglio nel c.a. in presenza di armature d'anima longitudinali e trasversali (Shear in RC elements with longitudinal and transversal web reinforcements), *Studi e Ricerche, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in C. A., Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano*, V. 17, 301- 317
- [11] EC2 - Eurocode No.2 (2005), Design of Concrete Structures – Part.1: General Rules and Rules for Buildings – *UNI ENV 1992-1-1*
- [12] P. COLAJANNI, G. MANCINI, A. RECUPERO (2007), Effetti di degrado nell'interazione N-M-V per elementi in c.a. soggetti ad azione ciclica di natura sismica, *Atti del XII Convegno "L'Ingegneria Sismica in Italia"*, Anidis – Pisa, 10-14 Giugno, Atti del Convegno su CD.